

# INDEKS TOPOLOGI BERBASIS DERAJAT DARI GRAF JARING LABA-LABA

Ni Wayan Emalia Triana<sup>1</sup>, Putu Kartika Dewi<sup>2</sup>, Raphita Yanisari Silalahi<sup>3</sup>

<sup>1,2,3</sup> Jurusan Matematika, FMIPA, Universitas Pendidikan Ganesha

Corresponding e-mail: [emalia@student.undiksha.ac.id](mailto:emalia@student.undiksha.ac.id)

Copyright © 2026 The Author



This is an open access article

Under the Creative Commons Attribution Share Alike 4.0 International License

DOI: [10.53866/jimi.v6i2.1289](https://doi.org/10.53866/jimi.v6i2.1289)

## Abstrak

Teori graf merupakan salah satu cabang matematika diskret yang banyak digunakan sebagai alat pemodelan dalam berbagai bidang ilmu. Suatu graf  $G$  didefinisikan sebagai pasangan  $(V, E)$ , dengan  $V$  adalah himpunan tak kosong dengan elemen-elemennya disebut simpul (*vertex*) dan  $E$  adalah himpunan dengan elemen-elemennya adalah pasangan tak terurut dua simpul berbeda dari  $V$  yang disebut sisi (*edge*). Pada penelitian ini dikaji graf jaring laba-laba (*spider web graph*) yang dinotasikan dengan  $R_{m,n}$  yaitu graf yang dibentuk dari satu buah graf bintang  $S_n$  dan  $m$  buah graf sikel  $C_n$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 3$  dengan penamaan simpul pada sikel ke- $i$ . Indeks topologi adalah nilai numerik yang menunjukkan sifat struktural dan konektivitas graf. Indeks topologi berbasis derajat merupakan indeks yang didefinisikan berdasarkan derajat dari simpul dalam sebuah graf. Metode penelitian yang digunakan meliputi penentuan derajat setiap kelas simpul serta perhitungan indeks topologi berdasarkan definisi masing-masing indeks. Indeks topologi berbasis derajat dari graf jaring laba-laba yang dikaji dalam penelitian ini meliputi indeks Harmonik, indeks Randic, indeks Zagreb, *Sum-connectivity Index*, dan *Geometric-Arithmetic Index*. Penelitian ini bertujuan untuk menentukan rumus umum dari masing-masing indeks topologi tersebut sebagai fungsi dari parameter  $m$  dan  $n$ .

**Kata Kunci:** Indeks Topologi, Berbasis Derajat, Graf Jaring Laba-Laba

## *Degree-Based Topological Indices of Spider Web Graphs*

### *Abstract*

*Graph theory is one of the branches of discrete mathematics that is widely used as a modeling tool in various scientific fields. A graph  $G$  is a pair of sets  $V$  and  $E$ , where  $V$  is a non-empty set whose elements are called vertices, and  $E$  is a set whose elements are unordered pairs of two different vertices from  $V$ , called edges. This study examines spider web graphs denoted by  $R_{m,n}$  which are graphs formed from one star graph  $S_n$  and  $m$  cycle graphs  $C_n$  with  $m \geq 2$  and  $n \geq 3$ , with the naming of vertices on the  $i$ -th cycle. A topological index is a numerical value that indicates the structural properties and connectivity of a graph. Degree-based topological indices are indices defined based on the degree of a vertex in a graph. The research methods include determining the degree of each class of vertices and computing the topological indices based on the definition of each index. The degree-based topological indices of the spider web graphs studied in this research include the Harmonic Index, Randic Index, Zagreb Indices, Sum-Connectivity Index, and Geometric-Arithmetic Index. This study aims to determine the general formula for each of these topological indices as function of the parameters  $m$  and  $n$ .*

**Keywords:** Topology Indices, Degree Based, Spider Web Graph

## 1. Pendahuluan

Teori graf merupakan salah satu topik yang hingga saat ini tetap memiliki peran penting dalam berbagai kajian ilmiah. Hal ini disebabkan oleh luasnya penerapan teori graf dalam berbagai disiplin ilmu, seperti biologi, ilmu komputer, ekonomi, teknik informatika, linguistik, matematika, kesehatan, dan ilmu sosial. Dalam konteks tersebut, graf berfungsi sebagai alat pemodelan yang efektif untuk merepresentasikan, menganalisis, serta menyelesaikan suatu permasalahan (Afifah et al., 2023). Kajian mengenai struktur graf sederhana dan berhingga masih terus berkembang dalam teori graf, termasuk pada kajian pelabelan graf

seperti *irregular labeling* (Suparta et al., 2024) serta kajian pewarnaan graf seperti *odd-graceful coloring* (Suparta et al., 2025). Graf  $G(V, E)$  merupakan suatu sistem yang terdiri atas himpunan berhingga dan tak kosong dari simpul  $V(G)$  serta himpunan sisi  $E(G)$  yang menghubungkan pasangan simpul dalam graf tersebut (Suparta et al., 2023). Misalkan  $G$  adalah graf terhubung sederhana dengan himpunan simpul  $V = V(G)$  dan himpunan sisi  $E = E(G)$ . Orde  $|V|$  dari  $G$  dilambangkan dengan  $n = n(G)$  dan ukuran  $|E|$  dari  $G$  dilambangkan dengan  $m = m(G)$ . Derajat dari simpul  $v \in V$  adalah  $deg(v)$  (Rasi et al., 2017).

Indeks topologi merupakan besaran numerik yang merepresentasikan karakteristik struktural serta tingkat konektivitas suatu graf (Bolombias et al., 2024). Indeks topologi merupakan angka yang diperoleh dari representasi graf yang menggambarkan struktur molekul atau sistem lainnya, dan digunakan sebagai alat analisis dalam mengkaji berbagai sifat kimia maupun fisika dari suatu senyawa (Abdurahim et al., 2025). Indeks topologi terdiri dari berbagai jenis seperti indeks topologi berbasis derajat, indeks topologi berbasis jarak, dan indeks topologi berbasis spektrum. Salah satu kategori indeks topologi yang paling banyak diteliti dalam kimia matematis adalah indeks topologi berbasis derajat, yang didefinisikan berdasarkan derajat dari simpul-simpul dalam sebuah graf (Saeed et al., 2021). Beberapa indeks topologi yang berbasis derajat antara lain indeks Harmonik, indeks Randic, indeks Zagreb, *Sum-connectivity Index*, dan *Geometric-Arithmetic Index*.

Beberapa peneliti telah membahas mengenai indeks topologi pada graf antara lain sebagai berikut. Husni et al. (2024) yang membahas indeks Szeged dan indeks Padmakar–Ivan pada graf nilpoten gelanggang bilangan bulat modulo dengan orde pangkat prima, kemudian Prasetyo et al. (2025) mengkaji komputasi indeks Zagreb pertama, indeks Wiener, dan indeks Gutman pada power dari grup dihedral menggunakan Python, kemudian Ghoffari et al. (2025) meneliti indeks Hyper-Wiener dan indeks Szeged pada graf non-koprime dari grup bilangan bulat modulo, serta Saragih et al. (2025) membahas indeks Zagreb pertama dan kedua pada graf nilpoten gelanggang bilangan bulat modulo  $n$ .

Berdasarkan pemaparan tersebut, sejumlah penelitian telah menghitung indeks topologi pada berbagai kelas graf, namun kajian mengenai indeks topologi khususnya indeks topologi berbasis derajat pada graf jaring laba-laba masih belum ditemukan. Penelitian yang dilakukan oleh Tuhfatul Janan & Syifauly Janan (2022) hanya membahas dimensi metrik graf jaring laba-laba tanpa mengkaji sifat struktural lain yang berkaitan dengan derajat simpul. Padahal, graf jaring laba-laba memiliki struktur unik yang dikonstruksi dari graf bintang dan graf siklus sehingga membentuk pola derajat simpul yang beragam dan berlapis. Hingga saat ini, belum ditemukan penelitian yang mengkaji indeks topologi berbasis derajat pada graf jaring laba-laba. Oleh karena itu, penelitian ini difokuskan pada indeks topologi berbasis derajat pada graf jaring laba-laba. Indeks topologi yang akan dibahas pada penelitian ini adalah indeks Harmonik, indeks Randic, indeks Zagreb, *Sum-connectivity Index*, dan *Geometric-Arithmetic Index*.

## 2. Metode Penelitian

Metode yang digunakan dalam penelitian ini menggunakan metode analitis dengan pendekatan deduktif. Perhitungan indeks topologi berbasis derajat dilakukan terlebih dahulu pada beberapa graf jaring laba-laba berparameter tertentu, yaitu  $R_{2,4}$ ,  $R_{3,4}$ ,  $R_{4,4}$ ,  $R_{2,3}$ ,  $R_{3,5}$ , dan  $R_{4,5}$ . Selanjutnya, sisi-sisi pada graf jaring laba-laba dikelompokkan ke dalam empat kasus berdasarkan pasangan derajat simpul yang saling berhubungan. Pengelompokan tersebut digunakan untuk menyusun bentuk umum perhitungan indeks. Berdasarkan hasil pengelompokan ini, diperoleh rumus umum indeks Harmonik untuk graf jaring laba-laba  $R_{m,n}$ . Selanjutnya, dengan prosedur yang sama, ditentukan rumus umum untuk indeks Randic, indeks Zagreb pertama dan kedua, *Sum-connectivity Index*, serta *Geometric-Arithmetic Index*.

## 3. Hasil dan Pembahasan

Artikel ini menyajikan hasil penelitian yang diperoleh dari analisis indeks Harmonik, indeks Randic, indeks Zagreb, *Sum-connectivity Index*, dan *Geometric-Arithmetic Index* pada graf jaring laba-laba.

**Definisi 3.1.** (Rasi et al., 2017) Indeks Harmonik merupakan rata-rata harmonik dari derajat dua simpul berbeda,  $u$  dan  $v$ , yang saling bertetangga. Indeks Harmonik dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $H(G)$  didefinisikan sebagai berikut.

$$H(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2}{deg(u) + deg(v)}$$

dengan  $deg(u)$  merupakan derajat simpul  $u$  yaitu banyaknya simpul  $v \neq u$  yang bertetangga dengan simpul  $u$ .

**Definisi 3.2.** (Abdurahim et al., 2025) Indeks Randic adalah jumlahan kebalikan dari akar dari perkalian dua simpul berbeda yang bertetangga. Indeks Randic dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $R(G)$  didefinisikan sebagai berikut.

$$R(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(v)}}$$

**Definisi 3.3.** (Bolombias et al., 2024) Indeks Zagreb pertama merupakan jumlahan dari kuadrat derajat simpul-simpul pada graf. Indeks Zagreb pertama dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $M_1(G)$  didefinisikan sebagai berikut.

$$M_1(G) = \sum_{u \in V(G)} (\deg(u))^2$$

**Definisi 3.4.** (Bolombias et al., 2024) Indeks Zagreb kedua merupakan jumlahan dari perkalian derajat dua simpul yang saling bertetangga pada graf. Indeks Zagreb kedua dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $M_2(G)$  didefinisikan sebagai berikut.

$$M_2(G) = \sum_{uv \in E(G)} \deg(u) \cdot \deg(v)$$

**Definisi 3.5.** (Gutman, 2013) *Sum-connectivity Index* adalah jumlahan kebalikan dari akar dari penjumlahan dua simpul berbeda yang bertetangga. *Sum-connectivity Index* dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $SCI(G)$  didefinisikan sebagai berikut.

$$SCI(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{1}{\sqrt{\deg(u) + \deg(v)}}$$

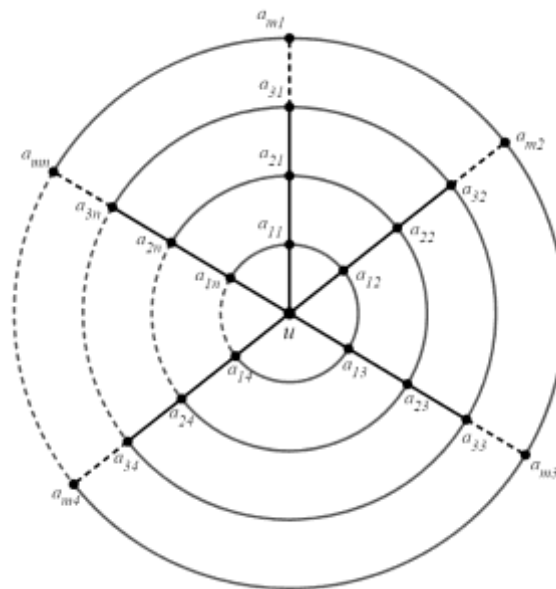
**Definisi 3.6.** (Gutman, 2013) *Geometric-Arithmetic Index* merupakan indeks yang diperoleh dari rasio antara rata-rata geometri dan rata-rata aritmetika dari beberapa sifat simpul-simpul yang berdekatan. *Geometric-Arithmetic Index* dari graf  $G$  dinotasikan dengan  $GA(G)$  didefinisikan sebagai berikut.

$$GA(G) = \sum_{uv \in E(G)} \frac{2\sqrt{\deg(u) \deg(v)}}{\deg(u) + \deg(v)}$$

dimana  $\sqrt{\deg(u) \deg(v)}$  dan  $\frac{1}{2}(\deg(u) + \deg(v))$  adalah rata-rata geometri dan rata-rata aritmetika, masing-masing dari derajat simpul ujung suatu sisi.

### Graf Jaring Laba-Laba

Pada penelitian yang dilakukan oleh (Tuhfatul Janan & Syifaul Janan, 2022), graf jaring laba-laba (*spider web graph*) yang dinotasikan dengan  $R_{m,n}$  adalah graf yang dibentuk dari satu buah graf bintang  $S_n$  dan  $m$  buah graf sikel  $C_n$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 3$ . Misalkan  $a_{ij}$  menyatakan simpul pada graf dengan  $1 \leq i \leq m$  dan  $1 \leq j \leq n$ , dimana  $i$  menunjukkan lingkaran ke- $i$  dan  $j$  menunjukkan posisi simpul pada lingkaran tersebut. Notasi  $C_n(m)$  menyatakan graf sikel  $C_n$  ke- $m$ , dengan  $V(C_n(m)) = \{a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots, a_{mn}\}$  dan  $V(S_n) = \{u\} \cup \{a_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  dengan  $u$  sebagai simpul pusatnya. Himpunan simpul pada graf  $R_{m,n}$  dinyatakan sebagai  $V(R_{m,n}) = \{u\} \cup \{a_{ij} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  sedangkan himpunan sisi pada graf  $R_{m,n}$  dinyatakan sebagai  $E(R_{m,n}) = \{ua_{1j} | 1 \leq j \leq n\} \cup \{a_{ij}a_{i+1j} | 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n\} \cup \{a_{ij}a_{ij+1} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  dengan  $a_{in+1} = a_{i1}$ . Jumlah orde dan ukuran dari graf  $R_{m,n}$  dinyatakan sebagai  $|V(R_{m,n})| = 1 + mn$  dan  $|E(R_{m,n})| = 2mn$ . Representasi graf jaring laba-laba  $R_{m,n}$  ditunjukkan pada Gambar 1.



Gambar 1. Graf Jaring Laba-Laba  $R_{m,n}$

**Teorema 3.1.** Misal diberikan graf jaring laba-laba yang dinotasikan dengan  $R_{m,n}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 3$ , maka Indeks Harmonik dari graf  $R_{m,n}$ , yaitu  $H(R_{m,n})$  adalah

$$H(R_{m,n}) = n \left( \frac{2}{n+4} + \frac{2m-3}{4} + \frac{13}{21} \right)$$

**Bukti.**

Untuk graf  $R_{m,n}$  dengan orde  $1 + mn$  dan ukuran  $2mn$ . Selanjutnya perhitungan akan dibagi dalam empat kasus sebagai berikut.

- a. Kasus 1: sisi  $ua_{1j}$

Simpul pusat  $u$  dihubungkan oleh  $n$  sisi ke setiap simpul  $a_{1j}$  pada siklus pertama, maka simpul pusat  $u$  berderajat  $n$  dan setiap simpul  $a_{1j}$  memiliki derajat 4. Terdapat  $n$  sisi yang menghubungkan simpul pusat dengan simpul pada siklus pertama, maka terdapat sebanyak  $n$  sisi dengan pasangan derajat  $(n,4)$ . Oleh karena itu, didapat

$$\sum_{ua_{1j} \in E(R_{m,n})} \frac{2}{\deg(u) + \deg(a_{1j})} = \sum_{j=1}^n \frac{2}{\deg(u) + \deg(a_{1j})} = n \left( \frac{2}{n+4} \right)$$

- b. Kasus 2: sisi  $a_{ij}a_{i+1,j}, a_{in}a_{i1}, 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n-1$  pada  $C_n$

Pada graf  $R_{m,n}$  terdapat  $m$  siklus dimana masing-masing siklus merupakan graf  $C_n$  dengan  $n$  sisi. Seluruh sisi pada siklus pertama hingga siklus ke  $m-1$  menghubungkan simpul berderajat 4. Total sisi dalam graf adalah  $2mn$ . Akan tetapi, terdapat  $3n$  sisi yang telah dihitung pada kasus 1, 3, dan 4 sehingga jumlah sisi pada kasus ini adalah  $2mn - 3n$ . Oleh karena itu, didapat

$$\sum_{a_{ij}a_{i+1,j}, a_{in}a_{i1} \in E(R_{m,n})} \frac{2}{\deg(a_{ij}) + \deg(a_{i+1,j})} = (2mn - 3n) \left( \frac{2}{4+4} \right)$$

- c. Kasus 3: sisi  $a_{ij}a_{i+1,j}, 1 \leq i \leq m-1, 1 \leq j \leq n$

Pada kasus ini, sisinya menghubungkan simpul pada lapisan ke- $i$  dengan lapisan ke- $i+1$  di posisi sejajar. Simpul  $a_{ij}$  pada siklus ke- $(m-1)$  memiliki derajat 4 sedangkan  $a_{i+1,j}$  pada siklus ke- $m$  memiliki derajat 3. Untuk setiap posisi  $j$  dengan  $1 \leq j \leq n$  terdapat satu sisi yang

menghubungkan kedua simpul antar siklus tersebut, maka terdapat sebanyak  $n$  sisi dengan pasangan derajat  $(4,3)$ . Oleh karena itu, didapat

$$\sum_{a_{ij}a_{i+1j} \in E(R_{m,n})} \frac{2}{\deg(a_{ij}) + \deg(a_{i+1j})} = n \left( \frac{2}{4+3} \right)$$

d. Kasus 4: sisi  $a_{ij}a_{i+1j+1}$ ,  $i = m, 1 \leq j \leq n$

Pada kasus ini, sisi menghubungkan simpul-simpul yang berada pada siklus ke- $m$ . Semua simpul pada siklus ke- $m$  memiliki derajat 3. Terdapat  $n$  simpul pada siklus tersebut maka terdapat sebanyak  $n$  sisi yang memiliki pasangan derajat  $(3,3)$ . Oleh karena itu, didapat

$$\sum_{a_{i+1j}a_{i+1j+1} \in E(R_{m,n})} \frac{2}{\deg(a_{i+1j}) + \deg(a_{i+1j+1})} = n \left( \frac{2}{3+3} \right)$$

Selanjutnya didapat

$$\begin{aligned} H(R_{m,n}) &= \sum_{ua_{1j} \in E(R_{m,n})} \frac{2}{\deg(u) + \deg(a_{1j})} + \sum_{a_{ij}a_{ij+1}, a_{in}a_{i1} \in E(R_{m,n})} \frac{2}{\deg(a_{ij}) + \deg(a_{ij+1})} \\ &\quad + \sum_{a_{ij}a_{i+1j} \in E(R_{m,n})} \frac{2}{\deg(a_{ij}) + \deg(a_{i+1j})} \\ &\quad + \sum_{a_{i+1j}a_{i+1j+1} \in E(R_{m,n})} \frac{2}{\deg(a_{i+1j}) + \deg(a_{i+1j+1})} \\ &= n \left( \frac{2}{n+4} \right) + (2mn - 3n) \left( \frac{2}{4+4} \right) + n \left( \frac{2}{4+3} \right) + n \left( \frac{2}{3+3} \right) \\ &= n \left( \frac{2}{n+4} + \frac{2m-3}{4} + \frac{2}{7} + \frac{1}{3} \right) \\ &= n \left( \frac{2}{n+4} + \frac{2m-3}{4} + \frac{13}{21} \right) \end{aligned}$$

Jadi, Indeks Harmonik dari graf  $R_{m,n}$  adalah  $n \left( \frac{2}{n+4} + \frac{2m-3}{4} + \frac{13}{21} \right)$ .

Pembagian sisi ke dalam empat kasus berdasarkan pasangan derajat simpul ini akan digunakan pada perhitungan indeks-indeks berikutnya.

**Teorema 3.2.** Misal diberikan graf jaring laba-laba yang dinotasikan dengan  $R_{m,n}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 3$ , maka Indeks Randic dari graf  $R_{m,n}$  adalah

$$R(R_{m,n}) = n \left( \frac{\sqrt{n}}{2n} + \frac{2m-3}{4} + \frac{\sqrt{3}+2}{6} \right)$$

**Bukti.**

Dengan menggunakan pembagian kasus sisi seperti pada Teorema 3.1, diperoleh pasangan derajat simpul  $(n, 4)$ ,  $(4,4)$ ,  $(4,3)$ , dan  $(3,3)$  dengan banyak sisi berturut-turut adalah  $n$ ,  $(2mn - 3n)$ ,  $n$ , dan  $n$ .

Berdasarkan definisi indeks Randic, diperoleh

$$\begin{aligned} R(R_{m,n}) &= \sum_{ua_{1j} \in E(R_{m,n})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u) \deg(a_{1j})}} + \sum_{a_{ij}a_{ij+1}, a_{in}a_{i1} \in E(R_{m,n})} \frac{1}{\sqrt{\deg(a_{ij}) \deg(a_{ij+1})}} \\ &\quad + \sum_{a_{ij}a_{i+1j} \in E(R_{m,n})} \frac{1}{\sqrt{\deg(a_{ij}) \deg(a_{i+1j})}} \\ &\quad + \sum_{a_{i+1j}a_{i+1j+1} \in E(R_{m,n})} \frac{1}{\sqrt{\deg(a_{i+1j}) \deg(a_{i+1j+1})}} \\ &= n \left( \frac{1}{\sqrt{n \cdot 4}} \right) + (2mn - 3n) \left( \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 4}} \right) + n \left( \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 3}} \right) + n \left( \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 3}} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= n \left( \frac{1}{2\sqrt{n}} \right) + (2mn - 3n) \left( \frac{1}{4} \right) + n \left( \frac{1}{2\sqrt{3}} \right) + \frac{n}{3} \\
 &= n \left( \frac{\sqrt{n}}{2n} + \frac{2m-3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} + \frac{1}{3} \right) \\
 &= n \left( \frac{\sqrt{n}}{2n} + \frac{2m-3}{4} + \frac{\sqrt{3}+2}{6} \right)
 \end{aligned}$$

Jadi, Indeks Randic dari graf  $R_{m,n}$  adalah  $n \left( \frac{\sqrt{n}}{2n} + \frac{2m-3}{4} + \frac{\sqrt{3}+2}{6} \right)$ .

**Teorema 3.3.** Misal diberikan graf jaring laba-laba yang dinotasikan dengan  $R_{m,n}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 3$ , maka Indeks Zagreb 1 dari graf  $R_{m,n}$  adalah

$$M_1(R_{m,n}) = n(n + 16m - 7)$$

**Bukti.**

Untuk graf  $R_{m,n}$  dengan orde  $1 + mn$ . Selanjutnya perhitungan akan dibagi dalam tiga kasus sebagai berikut.

- a. Simpul pusat  $u$  memiliki derajat  $n$ .

$$\sum_{u \in V(R_{m,n})} (\deg(u))^2 = n^2$$

- b. Simpul-simpul pada siklus pertama hingga siklus ke- $(m-1)$  memiliki derajat 4.

$$\sum_{a_{ij} \in V(R_{m,n})} (\deg(a_{ij}))^2 = n(m-1) \cdot 4^2 = 16mn - 16n$$

- c. Simpul-simpul pada siklus ke- $m$  memiliki derajat 3.

$$\sum_{a_{ij} \in V(R_{m,n})} (\deg(a_{ij}))^2 = n \cdot 3^2 = 9n$$

Selanjutnya didapat

$$\begin{aligned}
 M_1(R_{m,n}) &= \sum_{u \in V(R_{m,n})} (\deg(u))^2 + \sum_{a_{ij} \in V(R_{m,n})} (\deg(a_{ij}))^2 + \sum_{a_{ij} \in V(R_{m,n})} (\deg(a_{ij}))^2 \\
 &= n^2 + 16mn - 16n + 9n \\
 &= n(n + 16m - 7)
 \end{aligned}$$

Jadi, Indeks Zagreb 1 dari graf  $R_{m,n}$  adalah  $n(n + 16m - 7)$ .

**Teorema 3.4.** Misal diberikan graf jaring laba-laba yang dinotasikan dengan  $R_{m,n}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 3$ , maka Indeks Zagreb 2 dari graf  $R_{m,n}$  adalah

$$M_2(R_{m,n}) = n(4n + 32m - 27)$$

**Bukti.**

Dengan menggunakan pembagian kasus sisi seperti pada Teorema 3.1, diperoleh pasangan derajat simpul  $(n, 4)$ ,  $(4, 4)$ ,  $(4, 3)$ , dan  $(3, 3)$  dengan banyak sisi berturut-turut adalah  $n$ ,  $(2mn - 3n)$ ,  $n$ , dan  $n$ .

Berdasarkan definisi indeks Zagreb 2, diperoleh

$$\begin{aligned}
 M_2(R_{m,n}) &= \sum_{ua_{1j} \in E(R_{m,n})} \deg(u) \deg(a_{1j}) + \sum_{a_{ij}a_{i+1}, a_{in}a_{i1} \in E(R_{m,n})} \deg(a_{ij}) \deg(a_{i+1}) \\
 &\quad + \sum_{a_{ij}a_{i+1} \in E(R_{m,n})} \deg(a_{ij}) \deg(a_{i+1}) \\
 &\quad + \sum_{a_{i+1}a_{i+1} \in E(R_{m,n})} \deg(a_{i+1}) \deg(a_{i+1}) \\
 &= n(4n) + (2mn - 3n)(4 \cdot 4) + n(4 \cdot 3) + n(3 \cdot 3) \\
 &= 4n^2 + 32mn - 48n + 12n + 9n \\
 &= n(4n + 32m - 27)
 \end{aligned}$$

Jadi, Indeks Zagreb 2 dari graf  $R_{m,n}$  adalah  $n(4n + 32m - 27)$ .

**Teorema 3.5.** Misal diberikan graf jaring laba-laba yang dinotasikan dengan  $R_{m,n}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 3$ , maka *Sum-connectivity Index* dari graf  $R_{m,n}$  adalah

$$SCI(R_{m,n}) = n \left( \frac{1}{\sqrt{n+4}} + \frac{2m-3}{2\sqrt{2}} + \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{6}}{42} \right)$$

**Bukti.**

Dengan menggunakan pembagian kasus sisi seperti pada Teorema 3.1, diperoleh pasangan derajat simpul  $(n, 4)$ ,  $(4,4)$ ,  $(4,3)$ , dan  $(3,3)$  dengan banyak sisi berturut-turut adalah  $n$ ,  $(2mn - 3n)$ ,  $n$ , dan  $n$ .

Berdasarkan definisi *Sum-connectivity Index*, diperoleh

$$\begin{aligned} SCI(R_{m,n}) &= \sum_{ua_{1j} \in E(R_{m,n})} \frac{1}{\sqrt{\deg(u) + \deg(a_{1j})}} + \sum_{a_{ij}a_{ij+1}, a_{in}a_{i1} \in E(R_{m,n})} \frac{1}{\sqrt{\deg(a_{ij}) + \deg(a_{ij+1})}} \\ &+ \sum_{a_{ij}a_{i+1j} \in E(R_{m,n})} \frac{1}{\sqrt{\deg(a_{ij}) + \deg(a_{i+1j})}} \\ &+ \sum_{a_{i+1j}a_{i+1j+1} \in E(R_{m,n})} \frac{1}{\sqrt{\deg(a_{i+1j}) + \deg(a_{i+1j+1})}} \\ &= n \left( \frac{1}{\sqrt{n+4}} \right) + (2mn - 3n) \left( \frac{1}{\sqrt{4+4}} \right) + n \left( \frac{1}{\sqrt{4+3}} \right) + n \left( \frac{1}{\sqrt{3+3}} \right) \\ &= n \left( \frac{1}{\sqrt{n+4}} \right) + (2mn - 3n) \left( \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) + n \left( \frac{1}{\sqrt{7}} \right) + n \left( \frac{1}{\sqrt{6}} \right) \\ &= n \left( \frac{1}{\sqrt{n+4}} + \frac{2m-3}{2\sqrt{2}} + \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{6}}{42} \right) \end{aligned}$$

Jadi, *Sum-connectivity Index* dari graf  $R_{m,n}$  adalah  $n \left( \frac{1}{\sqrt{n+4}} + \frac{2m-3}{2\sqrt{2}} + \frac{6\sqrt{7}+7\sqrt{6}}{42} \right)$ .

**Teorema 3.6.** Misal diberikan graf jaring laba-laba yang dinotasikan dengan  $R_{m,n}$  dengan  $m \geq 2$  dan  $n \geq 3$ , maka *Geometric-Arithmetic Index* dari graf  $R_{m,n}$  adalah

$$GA(R_{m,n}) = n \left( \frac{4\sqrt{n}}{n+4} + 2m + \frac{4\sqrt{3}}{7} - 2 \right)$$

**Bukti.**

Dengan menggunakan pembagian kasus sisi seperti pada Teorema 3.1, diperoleh pasangan derajat simpul  $(n, 4)$ ,  $(4,4)$ ,  $(4,3)$ , dan  $(3,3)$  dengan banyak sisi berturut-turut adalah  $n$ ,  $(2mn - 3n)$ ,  $n$ , dan  $n$ .

Berdasarkan definisi *Geometric-Arithmetic Index*, diperoleh

$$\begin{aligned} GA(R_{m,n}) &= \sum_{ua_{1j} \in E(R_{m,n})} \frac{2\sqrt{\deg(u) \deg(a_{1j})}}{\deg(u) + \deg(a_{1j})} + \sum_{a_{ij}a_{ij+1}, a_{in}a_{i1} \in E(R_{m,n})} \frac{2\sqrt{\deg(a_{ij}) \deg(a_{ij+1})}}{\deg(a_{ij}) + \deg(a_{ij+1})} \\ &+ \sum_{a_{ij}a_{i+1j} \in E(R_{m,n})} \frac{2\sqrt{\deg(a_{ij}) \deg(a_{i+1j})}}{\deg(a_{ij}) + \deg(a_{i+1j})} \\ &+ \sum_{a_{i+1j}a_{i+1j+1} \in E(R_{m,n})} \frac{2\sqrt{\deg(a_{i+1j}) \deg(a_{i+1j+1})}}{\deg(a_{i+1j}) + \deg(a_{i+1j+1})} \\ &= n \left( \frac{2\sqrt{n \cdot 4}}{n+4} \right) + (2mn - 3n) \left( \frac{2\sqrt{4 \cdot 4}}{4+4} \right) + n \left( \frac{2\sqrt{4 \cdot 3}}{4+3} \right) + n \left( \frac{2\sqrt{3 \cdot 3}}{3+3} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= n \left( \frac{4\sqrt{n}}{n+4} \right) + n(2m-3) + n \left( \frac{4\sqrt{3}}{7} \right) + n \\
 &= n \left( \frac{4\sqrt{n}}{n+4} + 2m + \frac{4\sqrt{3}}{7} - 2 \right)
 \end{aligned}$$

Jadi, *Geometric-Arithmetic Index* dari graf  $R_{m,n}$  adalah  $n \left( \frac{4\sqrt{n}}{n+4} + 2m + \frac{4\sqrt{3}}{7} - 2 \right)$ .

Sebagai bentuk validasi terhadap rumus umum yang diperoleh, berikut diberikan contoh perhitungan pada salah satu indeks. Misalkan diberikan graf jaring laba-laba  $R_{2,4}$ . Berdasarkan rumus umum yang telah diperoleh pada Teorema 3.1, nilai indeks Harmonik dari graf  $R_{2,4}$  adalah sebagai berikut.

$$\begin{aligned}
 H(R_{m,n}) &= n \left( \frac{2}{n+4} + \frac{2m-3}{4} + \frac{13}{21} \right) \\
 H(R_{2,4}) &= 4 \left( \frac{2}{4+4} + \frac{2(2)-3}{4} + \frac{13}{21} \right) = \frac{94}{21}
 \end{aligned}$$

Nilai yang diperoleh tersebut konsisten dengan hasil perhitungan langsung berdasarkan definisi indeks Harmonik, yaitu dengan menjumlahkan kontribusi setiap sisi berdasarkan pasangan derajat simpul yang saling bertetangga pada graf  $R_{2,4}$ . Dengan demikian, rumus umum yang diperoleh dapat dikatakan valid untuk parameter tersebut. Prosedur yang sama dapat diterapkan pada indeks topologi lainnya dan memberikan hasil yang konsisten dengan perhitungan langsung.

Berdasarkan hasil validasi tersebut, selanjutnya dilakukan analisis terhadap karakteristik nilai indeks topologi yang diperoleh. Nilai indeks topologi pada graf jaring laba-laba  $R_{m,n}$  sangat dipengaruhi oleh distribusi derajat simpul yang tidak seragam. Simpul pusat yang memiliki derajat paling tinggi, yaitu  $n$ , memberikan kontribusi dominan terhadap nilai indeks, khususnya pada indeks yang melibatkan pasangan derajat simpul. Hal ini menunjukkan bahwa keberadaan simpul pusat berperan penting dalam menentukan tingkat konektivitas global graf. Selain itu, simpul-simpul pada lapisan dalam yang berderajat 4 juga memberikan kontribusi yang signifikan karena jumlahnya yang relatif banyak, sehingga memperkuat struktur internal graf secara keseluruhan.

Di sisi lain, simpul-simpul pada lapisan terluar yang berderajat 3 memberikan kontribusi yang relatif lebih kecil terhadap nilai indeks. Hal ini disebabkan oleh derajatnya yang lebih rendah serta posisinya yang berada pada lapisan terluar graf. Parameter  $n$  mempengaruhi nilai indeks melalui peningkatan derajat simpul pusat, sehingga berdampak cukup signifikan terhadap kenaikan nilai indeks. Sementara itu, parameter  $m$  yang menyatakan banyaknya lapisan berpengaruh terhadap jumlah sisi dalam graf, sehingga meningkatkan nilai indeks secara bertahap. Dengan demikian, nilai indeks topologi pada graf  $R_{m,n}$  mencerminkan struktur graf yang terpusat, di mana bagian pusat dan lapisan dalam memiliki peran yang lebih dominan dibandingkan lapisan luar dalam membentuk karakteristik konektivitas graf.

#### 4. Kesimpulan

Diperoleh nilai dari indeks Harmonik, indeks Randic, indeks Zagreb 1, indeks Zagreb 2, *Sum-connectivity Index*, dan *Geometric-Arithmetic Index* dari graf jaring laba-laba adalah sebagai berikut.

Indeks Harmonik

$$H(R_{m,n}) = n \left( \frac{2}{n+4} + \frac{2m-3}{4} + \frac{13}{21} \right)$$

Indeks Randic

$$R(R_{m,n}) = n \left( \frac{\sqrt{n}}{2n} + \frac{2m-3}{4} + \frac{\sqrt{3}+2}{6} \right)$$

Indeks Zagreb 1

$$M_1(R_{m,n}) = n(n+16m-7)$$

Indeks Zagreb 2

$$M_2(R_{m,n}) = n(4n+32m-27)$$

*Sum-connectivity Index*

$$SCI(R_{m,n}) = n \left( \frac{1}{\sqrt{n+4}} + \frac{2m-3}{2\sqrt{2}} + \frac{6\sqrt{7} + 7\sqrt{6}}{42} \right)$$

*Geometric-Arithmetic Index*

$$GA(R_{m,n}) = n \left( \frac{4\sqrt{n}}{n+4} + 2m + \frac{4\sqrt{3}}{7} - 2 \right)$$

### Bibliografi

- Abdurahim, Qudsi, J., Muawanah, S., & Salwa. (2025). *Indeks Harmonik, Randic, dan Gutman dari Graf Koprime Prima untuk Grup Bilangan Bulat Modulo*. 7(1), 38–46.
- Affifah, L., Sujarwo, I., & Khudzaifah, M. (2023). Indeks Harmonik dan Indeks Gutman Graf Nilradikal pada Gelanggang Komutatif dengan Satuan. *Jurnal Riset Mahasiswa Matematika*, 2(4), 138–143. <https://doi.org/10.18860/jrmm.v2i4.14902>
- Bolombias, M. H. S. T., Putra, G. L., & Haning, F. O. (2024). Indeks Topologi Pada Graf Pembagi Nol. *Jurnal Fasilkom*, 8(2), 105–121.
- Ghoffari, L. H., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., & Suparta, I. N. (2025). *Hyper-Wiener and Szeged Indices of non-Coprime Graphs of Modulo Integer Groups*. 8(1), 1–6.
- Gutman, I. (2013). Degree-based topological indices. *Croatica Chemica Acta*, 86(4), 351–361. <https://doi.org/10.5562/cca2294>
- Husni, M. N., Wardhana, I. G. A. W., Dewi, P. K., & Suparta, I. N. (2024). *Szeged Index and Padmakar-Ivan Index of Nilpotent Graph of Integer Modulo Ring with Prime Power Order*. 20(2), 332–339. <https://doi.org/10.20956/j.v20i2.31418>
- Prasetyo, M. A. P., Syechah, B. N., Sintiar, N. L. D., & Wardhana, I. G. A. W. (2025). *Computing The First Zagreb Index, The Wiener Index and The Gutman Index of The Power of Dihedral Group Using Python*. 22(1), 102–113. <https://doi.org/10.20956/j.v22i1.44688>
- Rasi, R., Sheikholeslami, S. M., & Gutman, I. (2017). *On Harmonic Index of Trees*. 78, 405–416.
- Saeed, N., Long, K., Mufti, Z. S., Sajid, H., & Rehman, A. (2021). Degree-based topological indices of boron B12. *Journal of Chemistry, 2021*. <https://doi.org/10.1155/2021/5563218>
- Saragih, K. E., Dewi, P. K., & Suharta, I. G. P. (2025). *Indeks Zagreb Pertama dan Kedua pada Graf Nilpoten Gelanggang Bilangan Bulat Modulo n*. 19(3), 171–191.
- Suparta, I. N., Candiasa, M., Prasancika, W. A., & Baca, M. (2024). *Modular irregularity strength of dense graphs*. 12, 105–116. <https://doi.org/10.5614/ejgta.2024.12.1.9>
- Suparta, I. N., Lin, Y., Hasni, R., & Budayana, I. N. (2025). *On odd-graceful coloring of graphs*. 10(2), 335–354.
- Suparta, I. N., Venkathacalam, M., Gunadi, I. G. A., & Pratama, P. A. C. (2023). *Graceful Chromatic Number Of Some Cartesian Product Graphs*. 9(2), 193–208. <https://doi.org/10.15826/umj.2023.2.016>
- Tuhfatul Janan, & Syifaul Janan. (2022). Dimensi Metrik Dari Graf Jaring Laba-Laba. *Proximal: Jurnal Penelitian Matematika Dan Pendidikan Matematika*, 5(2), 181–190. <https://doi.org/10.30605/proximal.v5i2.1788>